Материалы для проведения регионального этапа

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

Первый день

27–28 января 2012 г.

Москва, 2012

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.А. Адуенко, А.В. Акопян, А.В. Антропов, Д.С. Бабичев, А.А. Баган, А.Я. Белов-Канель, Н.В. Богачёв, И.И. Богданов, В.А. Брагин, Р.А. Гимадеев, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, С.А. Дориченко, М.А. Евдокимов, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, Ф.А. Ивлев, П.А. Кожевников, П.Ю. Козлов, М.А. Кунгожин, И.В. Макаров, Е.Г. Молчанов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, К.А. Праведников, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2011–2012 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 27 и 28 января 2012 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске? (*И. Богданов*)

Ответ. 3 числа.

Решение. Предположим, что чисел хотя бы четыре, и a — число с минимальным модулем. Из остальных чисел хотя бы два имеют один знак (оба неотрицательны или оба неположительны). Обозначим их b и c; тогда $bc = |bc| \geqslant |a|^2 = a^2$, что противоречит условию.

Осталось привести пример трёх чисел, удовлетворяющих условию. Подходят, например, числа $1, 2, -3$.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

Показано, что чисел на доске не больше трёх — 4 балла.

Приведён пример трёх чисел, удовлетворяющих условию задачи — 2 балла.

9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть O_1, r_1 и O_2, r_2 — соответственно центры и радиусы окружностей ω_1 и ω_2, а K — точка пересечения ℓ_1 и ℓ_2. Заметим, что точка P лежит на отрезке O_1O_2 и делит его в отношении $r_1 : r_2$.

Обозначим через P_1 точку касания ℓ_2 и ω_1, а через P_2 точку касания ℓ_1 и ω_2. Прямоугольные треугольники KO_1P_1 и KO_2P_2 подобные по острому углу при вершине K. Значит, $\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1P_1}{O_2P_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Таким образом, в треугольнике KO_1O_2 точ-

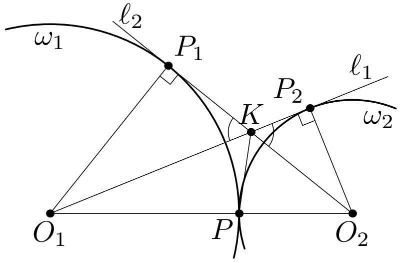

Рис. 1

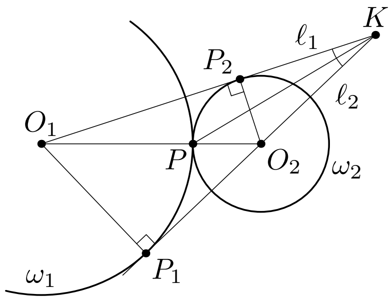

Рис. 2

ка P, лежащая на стороне O_1O_2, делит её в отношении, равном отношению прилежащих сторон KO_1 и KO_2. Из этого следует, что P — основание биссектрисы треугольника KO_1O_2.

Замечание. В задаче возможны два принципиально различных случая расположения точек и прямых. Они показаны на рис. 1 и рис. 2. Приведённое решение не зависит от случаев.

Комментарий. Если верно разобран один из этих двух случаев — 7 баллов.

9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.) (*С. Агаханов*)

Ответ. 0.

Решение. Из условия следует, что все сидящие за столом разбиваются на пары друзей; значит, рыцарей и лжецов поровну. Рассмотрим любую пару друзей. Если они сидят рядом, то рыцарь на заданный вопрос ответит «да», а лжец — «нет». Если же они не сидят рядом, то их ответы будут противоположными. В любом случае ровно один из пары друзей даст ответ «да». Значит, при любой рассадке все остальные 15 ответов будут «нет».

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$. (*А. Голованов*)

Решение. Предположим противное. Ясно, что тогда числа a и b натуральные. Действительно, если, скажем, $a < 0$, то, подставляя $m = 2|b|$, $n = 1$, получаем, что число $4ab^2 + b \cdot 1 = b(4ab + 1)$ должно быть квадратом некоторого числа x. С другой стороны, если $a < 0$, то числа b и $4ab + 1$ имеют разные знаки, так что $x^2 < 0$. Это невозможно.

Подставим теперь $m = 2b$, $n = 1$ и $m = 2b$, $n = 2$. Получим, что $4ab^2 + b = x^2$ и $4ab^2 + 4b = y^2$ при некоторых натуральных x, y. Ясно, что $y^2 > x^2 > 4b^2$, поэтому $y > x > 2b$. Но тогда $3b = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \geqslant 1 \cdot 4b$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Комментарий. Доказано только, что числа a и b неотрицательны — 1 балл.

10 класс

10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся. (*А. Голованов*)

Первое решение. Возьмем любые 5 из данных чисел: a, b, c, d, e. Если $abc > de$, то утверждение задачи верно. Если же $de \geqslant abc$, возьмем еще два числа f и g. Пусть скажем $f > g$. Тогда $def > abcg$; значит, и в этом случае утверждение задачи верно.

Второе решение. Упорядочим данные числа по убыванию: $a_1 > a_2 > \ldots > a_{10}$. Тогда $a_1a_2a_3 > a_4a_5a_6$. Если $a_6 \geqslant 1$, то $a_1a_2a_3 > a_4a_5$. Иначе $a_6 < 1$, откуда $a_7 < 1$, и, значит, $a_1a_2a_3 > > a_4a_5a_6 > a_4a_5a_6a_7$.

Замечание. Из второго решения видно, что $a_1a_2a_3$ больше либо произведения любых двух из оставшихся чисел, либо произведения любых четырех из оставшихся.

10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны. (*А. Акопян*)

Решение. Пусть K — точка пересечения отрезков AE и BF. Поскольку четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ вписанные, мы имеем $\angle AFB = \angle ADB$ и $\angle ADC = \angle AEC$. Отсюда и из условия задачи получаем $\angle AKB = \angle AFB + \angle FAE = = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC = = \angle AEC$. Итак, $\angle AKB = \angle AEC$. Это и значит, что $BF \parallel CE$.

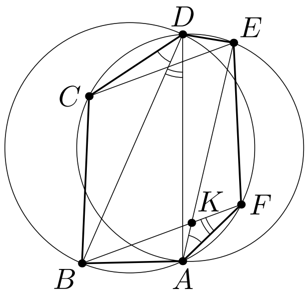

Рис. 3

10.3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

(*М. Мурашкин*)

Первое решение. Число $a_3 = 5 \cdot 72 = 360$ целое. При $n \geqslant 4$ будут верны равенства

$$a_n = 5 \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-2}}{n-2},$$

откуда следует, что

$$a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}\, a_{n-1} + a_{n-1}\right) = \frac{n+3}{n-1}\, a_{n-1}.$$

Значит, если $n \geqslant 4$, то число

$$a_n = \frac{(n+3)(n+2)\cdot \ldots \cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3} \cdot a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n$$

является целым, что и требовалось доказать.

Второе решение. Положим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, тогда $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Для решения задачи достаточно показать, все что числа S_n — целые. Из условия имеем $S_1 = 1$, $S_2 = 144$, а формула $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ принимает вид $S_{n+1} - S_n = \frac{5S_n}{n}$, откуда $S_{n+1} = \frac{n+5}{n} S_n$. Значит, при $n \geqslant 2$ получаем

$$S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)\cdot \ldots \cdot 7}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2} S_2 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \cdot 144 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}.$$

Так как хотя бы одно из чисел $n+5, n+4, n+3, n+2, n+1$ делится на 5, то при $n \geqslant 2$ число S_{n+1} — целое.

Комментарий. Получено рекуррентное соотношение $a_{n+1} = \frac{n+4}{n} a_n$, либо $S_{n+1} = \frac{n+5}{n} S_n$ — 4 балла.

Получена явная формула для S_n в замкнутой форме (то есть $S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}$) — не менее 6 баллов.

10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число).

Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний. (*В. Шмаров*)

Ответ. 1.

Первое решение. Индукцией по N докажем, что чётных паросочетаний на 1 больше, чем нечётных. Для $N = 1$ утверждение очевидно: есть лишь одно паросочетание, и оно чётно. Теперь докажем утверждение для $2N$ точек, предполагая, что оно верно для $2(N-1)$ точек. Обозначим отмеченные точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2N}$ в порядке обхода окружности по часовой стрелке.

Лемма. *Пусть в паросочетании участвует хорда A_1A_i. Тогда при чётном i она пересекает чётное число хорд, а при нечётном i — нечётное.*

Доказательство. Пусть хорду A_1A_i пересекают ровно k хорд. Рассмотрим точки $A_2, \ldots, A_{i-1}$; ровно k из них являются концами хорд, пересекающих A_1A_i (по одному концу каждой хорды). Остальные $i-2-k$ точек разбиваются на пары точек, соединенных хордами, которые не пересекают A_1A_i. Таким образом, число $i-2-k$ чётно, то есть числа i и k имеют одинаковую чётность. Лемма доказана. □

Разобьём теперь все паросочетания на $2N-1$ группу $\Pi_2, \ldots, \Pi_{2N}$: в группу Π_i попадут те паросочетания, в которых точка A_1 соединена с A_i. Теперь выкинем из каждого паросочетания из Π_i хорду A_1A_i; получатся все возможные паросочетания на оставшихся $2N-2$ точках. По предположению индукции, среди них чётных на одно больше, чем нечётных. При этом, если i чётно, то согласно лемме чётность паросочетания при выкидывании не менялась, а если i нечётно, то менялась. Значит, в каждом из N множеств $\Pi_2, \ldots, \Pi_{2N}$ чётных паросочетаний на одно больше, чем нечётных, а в каждом из $N-1$

множеств $\Pi_3, \ldots, \Pi_{2N-1}$ нечётных на одно больше, чем чётных. Итого, всего чётных паросочетаний больше, чем нечётных, на $N-(N-1)=1$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Приведём другое доказательство шага индукции.

Пусть отмеченные точки — $A_1, \ldots, A_{2N}$. Рассмотрим все паросочетания, в которых A_{2N-1} и A_{2N} соединены хордой. Эта хорда не пересекается ни с одной другой. Значит, выбросив её из каждого из рассматриваемых паросочетаний, мы получим все паросочетания на точках $A_1, \ldots, A_{2N-2}$, причём чётность каждого из них сохранится. По предположению индукции, среди наших паросочетаний чётных на одно больше, чем нечётных.

Для завершения доказательства достаточно показать, что среди всех остальных паросочетаний поровну чётных и нечётных. Рассмотрим любое из них; пусть в нём есть хорды $A_{2N-1}A_i$ и $A_{2N}A_k$. Теперь «поменяем местами» точки A_{2N-1} и A_{2N}, то есть заменим наши хорды на $A_{2N}A_i$ и $A_{2N-1}A_k$. При этом, если исходная хорда пересекалась с какой-то из остальных, то и новая хорда будет с ней пересекаться. С другой стороны, если хорды $A_{2N-1}A_i$ и $A_{2N}A_k$ не пересекались, то новые хорды будут пересекаться, и наоборот. Итак, каждому оставшемуся чётному паросочетанию мы сопоставили нечётное, и наоборот; при этом разным паросочетаниям, очевидно, соответствуют разные. Значит, оставшихся чётных и нечётных паросочетаний поровну, что и требовалось доказать.

Комментарий. Ответ без обоснования (или с рассмотрением лишь конкретных примеров) — 0 баллов.

11 класс

11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть a — один из членов прогрессии, а d — её разность. По условию, числа $a(a+d)$ и $a(a+2d)$ — также члены прогрессии; значит, их разность имеет вид nd при некотором целом n, то есть $a(a+2d) - a(a+d) = nd$, или $ad = nd$. Поскольку $d > 0$, получаем $a = n$, то есть a — целое число. В силу произвольности выбора члена прогрессии, задача решена.

Комментарий. Верно разобран лишь случай, когда все члены прогрессии рациональны — 1 балл.

Доказано только, что первый член прогрессии целый — 4 балла.

11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. (*Н. Агаханов*)

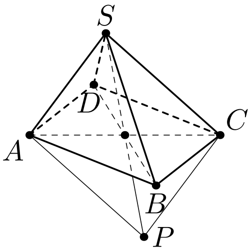

Рис. 4

Решение. Пусть P — точка пересечения данных прямых. Поскольку $PA \parallel SC$ и $PC \parallel SA$, точка P лежит в плоскости SAC, а четырёхугольник $ASCP$ — параллелограмм. Значит, прямая SP делит отрезок AC пополам. Аналогично, прямая SP делит отрезок BD пополам. Значит, прямая SP пересекает плоскость основания пирамиды в точке пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, и диагонали делятся этой точкой пополам. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы

$$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \ldots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$

также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n = \vec{0}$.

(В. Сендеров)

Решение. Отложим векторы $2\vec{a}_1, \ldots, 2\vec{a}_n$ из одной точки: пусть $\overrightarrow{OA_i} = 2\vec{a}_i$. Тогда все точки $A_1, \ldots, A_n$ различны и лежат на окружности ω с центром O.

Пусть $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$. Рассмотрим точку S такую, что $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$; по условию, все векторы $\vec{s} - 2\vec{a}_i$ имеют одну и ту же длину r. Поскольку $\overrightarrow{SA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OS} = 2\vec{a}_i - \vec{s}$, это означает, что все точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на окружности Ω с центром S и радиусом r.

Итак, окружности ω и Ω имеют $n > 2$ общих точек. Это значит, что они совпадают, а тогда и их центры совпадают, то есть $\vec{s} = \vec{0}$. Это и требовалось доказать.

11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.) *(К. Чувилин)*

Ответ. Могло.

Решение. Обозначим первый ответ на каждый вопрос через нуль, а второй — через единицу. Тогда каждому набору ответов соответствует набор из шести нулей и единиц. Аудиторию будем представлять в виде таблицы 8×8, в клетки которой расставляются наборы из шести цифр. Нам требуется заполнить таблицу так, чтобы соседние по вертикали или горизонтали наборы совпадали не более чем по одной цифре. Чётностью набора будем называть чётность суммы его цифр.

Покажем сначала, как заполнить клетки так, чтобы соседние наборы *различались* ровно по одной цифре. Пусть в наборах любой строки последние три цифры одинаковы, а первые три определяются слева направо так: 000, 001, 011, 010, 110, 100, 101, 111. Тогда любые два соседние по горизонтали набора различаются ровно по одной цифре. В каждом столбце последние три цифры определим таким же образом сверху вниз. Аналогично получится, что любые два соседние по вертикали набора различаются ровно по одной цифре. Остается заметить, что все наборы различны, поскольку наборы из разных столбцов отличаются в первых трёх цифрах, а из разных строк — во вторых трёх.

Покрасим теперь все клетки таблицы в белый и чёрный цвета в шахматном порядке так, чтобы левая верхняя клетка была белой. Тогда все чётные наборы попадут в белые клетки, а все нечётные — в чёрные. В каждом наборе в чёрных клетках заменим единицы на нули, а нули — на единицы. Заметим, что при таком обращении чётность набора не изменится, поэтому по-прежнему во всех белых клетках будут чётные наборы, а во всех чёрных — нечётные. При этом все нечётные наборы будут попарно различаться (в противном случае какие-то два набора совпадали бы до обращения), аналогично все чётные будут попарно различаться. Значит, и все наборы будут различны. Наконец, любые две соседние клетки имеют разные цвета, и, поскольку до обращения наборы в них различались ровно по одной цифре, после обращения наборы будут совпадать ровно по одной цифре.

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010

Рис. 5

На рис. 5 показан пример аналогичной расстановки для квадрата 4×4.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Правильный пример без обоснования или с неверным обоснованием — 3 балла.