



9 класс

Первый день

- 9.1. Даны натуральные числа M и N , большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M , надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N ? Найдите все возможные ответы.
- 9.2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .
- 9.3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток  так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.)
- 9.4. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася — модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя — модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного.

9 класс

Первый день

- 9.1. Даны натуральные числа M и N , большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M , надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N ? Найдите все возможные ответы.
- 9.2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .
- 9.3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток  так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.)
- 9.4. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася — модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя — модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного.

10 класс**Первый день**

- 10.1. Даны натуральные числа M и N , большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M , надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N ? Найдите все возможные ответы.
- 10.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Окружность Ω , описанная около треугольника ABC , пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C' . Касательные к Ω , проведённые в точках A' и C' , пересекаются в точке B' . Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω .
- 10.3. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трёхчлена $P(x)$, сумма корней трёхчлена $Q(x)$ и сумма корней трёхчлена $R(x)$ равны между собой.
- 10.4. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?

10 класс**Первый день**

- 10.1. Даны натуральные числа M и N , большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M , надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N ? Найдите все возможные ответы.
- 10.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Окружность Ω , описанная около треугольника ABC , пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C' . Касательные к Ω , проведённые в точках A' и C' , пересекаются в точке B' . Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω .
- 10.3. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трёхчлена $P(x)$, сумма корней трёхчлена $Q(x)$ и сумма корней трёхчлена $R(x)$ равны между собой.
- 10.4. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?

11 класс**Первый день**

- 11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы.
- 11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.
- 11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?
- 11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω , соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC , делит пополам отрезок BP .

11 класс**Первый день**

- 11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы.
- 11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.
- 11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?
- 11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω , соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC , делит пополам отрезок BP .